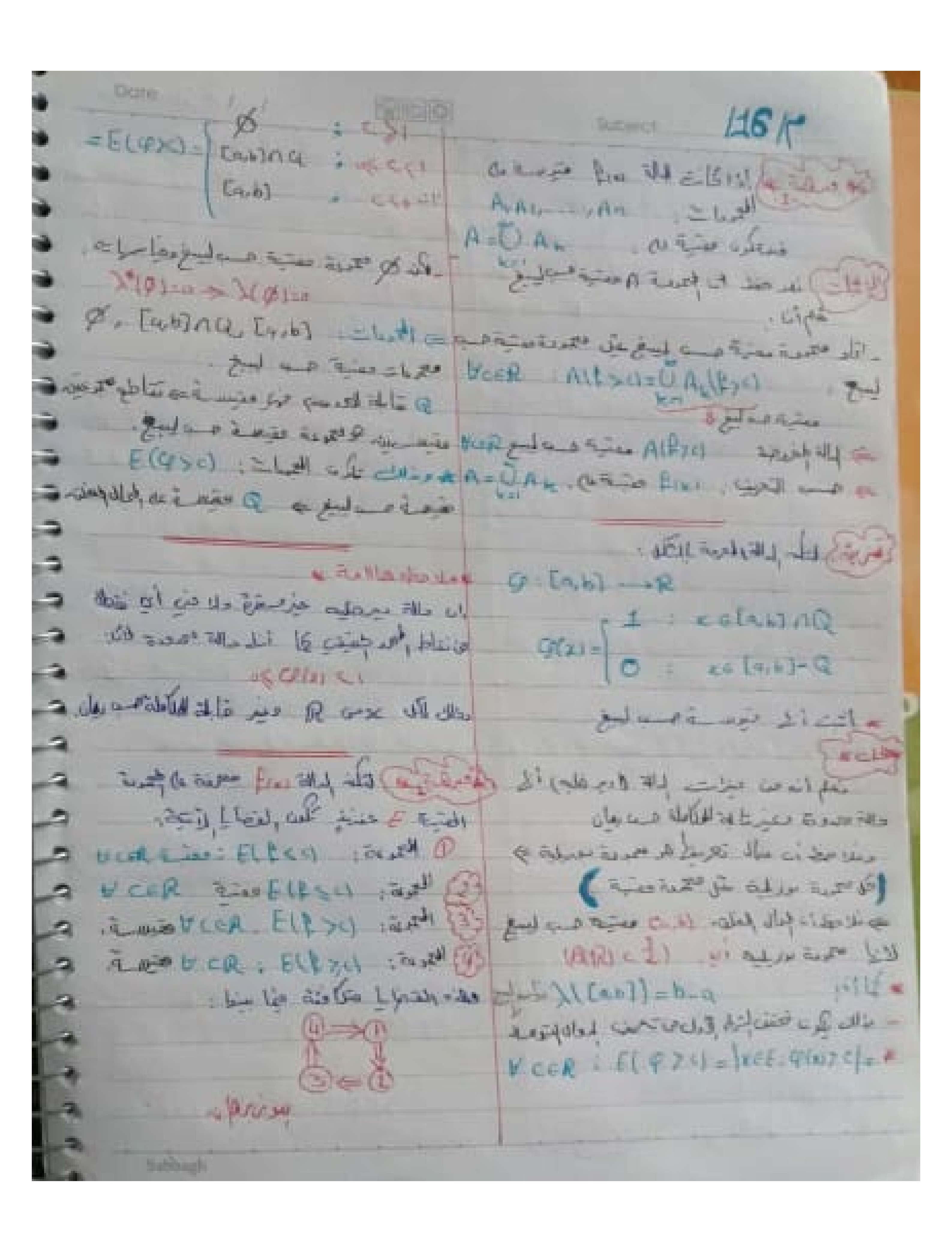
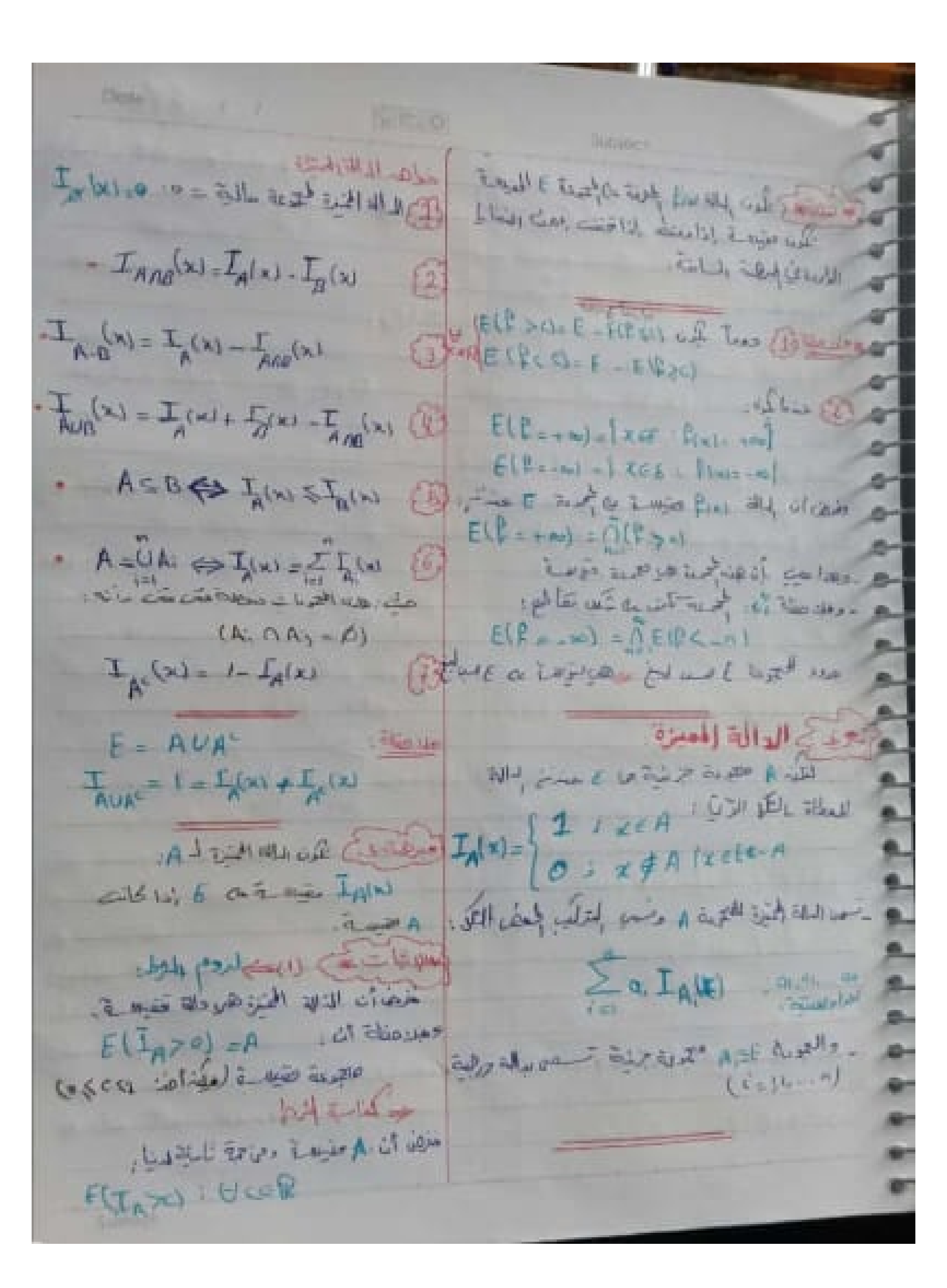

Date
Subject
116 م
$g : [a,b] \to \mathbb{R}$
$\lambda([a,b]) = b-a$



ملاحظة: [illegible] المجموعة E [illegible]
[illegible]
[illegible]

(1) $E(f > c) = E - E(f \le c)$
$E(f < c) = E - E(f \ge c)$

(2) كذلك:
$E(f = +\infty) = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$
$E(f = -\infty) = \{x \in E : f(x) = -\infty\}$

(3) [illegible] f(x) مقيسة [illegible] E [illegible]
$E(f = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f > n)$
ونلاحظ أن هذه المجموعة هي مجموعة مقيسة
ونلاحظ أنها مجموعة [illegible] تقاطع:
$E(f = -\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f < -n)$

[illegible]

تعريف: الدالة المميزة

لتكن A مجموعة جزئية من E نسمي الدالة المعطاة بالشكل الآتي:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 ; & x \in A \\ 0 ; & x \notin A \ (x \in E - A) \end{cases}$$

تسمى الدالة المميزة للمجموعة A ونسمي التركيب الخطي الكلي:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}(x)$$

والمجموعة A_i مجموعة جزئية تسمى بدالة درجية $(i = 1, \dots, n)$

خواص الدالة المميزة

1. الدالة المميزة لمجموعة خالية = 0 ، $I_\emptyset(x) = 0$
2. $I_{A\cap B}(x) = I_A(x) \cdot I_B(x)$
3. $I_{A-B}(x) = I_A(x) - I_{A\cap B}(x)$
4. $I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_{A\cap B}(x)$
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow I_A(x) \le I_B(x)$
6. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow I_A(x) = \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}(x)$
حيث هذه المجموعات منفصلة [illegible] $(A_i \cap A_j = \emptyset)$
7. $I_{A^c}(x) = 1 - I_A(x)$

ملاحظة:
$E = A \cup A^c$
$I_{A\cup A^c} = 1 = I_A(x) + I_{A^c}(x)$

مبرهنة: تكون الدالة المميزة لـ A: $I_A(x)$ مقيسة من E إذا كانت A مقيسة.

ملاحظات: (1) البرهان للوصول:
نفرض أن الدالة المميزة هي دالة مقيسة.
ونلاحظ أن $E(I_A > 0) = A$
مجموعة مقيسة لمكافئ [illegible]

(2) كذلك [illegible]
نفرض أن A مقيسة [illegible]
$E(I_A > c) ; \forall c \in \mathbb{R}$

- أيًا كانت [illegible]:

$$E(\mathbb{1}_A > c) = \begin{cases} E \\ A \\ \emptyset \end{cases}$$

- وهذه تنتمي إلى أي المجموعات:

$E(\mathbb{1}_A > c)$ مقيسة $\forall c \in \mathbb{R}$ لأنّ: $E, A, \emptyset$ مجموعات قابلة للقياس مقيسة.

* ملاحظة: كل دالة درجية هي مقيسة لأنها مجزأة تعرفها على مجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ مقيسة، أي أن المجموعات:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$$

- وهذا الأمر ينتج مباشرة من كون الدوال $\mathbb{1}_{A_k}(x)$ مقيسة عند كون المجموعات A_k مقيسة في E ($k=1,2,\dots,n$) وبالتالي:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x) = I(x)$$ مقيسة على E

← نستنتج: هذه الدالة الدرجية مقيسة على E

* ملاحظة: إذا كانت المجموعة E مجزأة أو [illegible] فإن أي مجموعة جزئية منها تكون مجزأة أيضًا، وبالتالي كل مجموعة جزئية من مجموعة مقيسة حسب ليبيغ قياسها معدوم هي أن مجموعة جزئية من مجزأة مقيسة.

تعريف: نقول عن خاصية $P(x)$ المحققة تقريبًا في كل مكان على مجموعة مقيسة E حسب ليبيغ مقيسة إذا كانت هذه الخاصية محققة على $E - E_0$ و $\lambda(E_0)=0$، أي قياسها معدوم.

مثال: المجموعات (المتتاليات - الإستمرار - [illegible]) الدالة الإشتقاق - التكامل.

مثال [1] نقول عن الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتين على المجموعة $E \in \mathcal{L}$ مقيسة حسب ليبيغ أنهما متساويتان تقريبًا في كل مكان من المجموعة E إذا كان:

$$f(x)=g(x)\ ;\ \forall x \in E - E_0$$

$\lambda(E_0)=0$

ونكتب: $f \overset{a.e}{=} g$ on E

حيث:

$$E_0 = \{x\in E : f(x)\neq g(x)\} = E(f\neq g)$$

[2] نقول أن متتالية الدوال $f_n(x)$ تتقارب نحو الدالة $f(x)$ على E في كل مكان تقريبًا إذا كان:

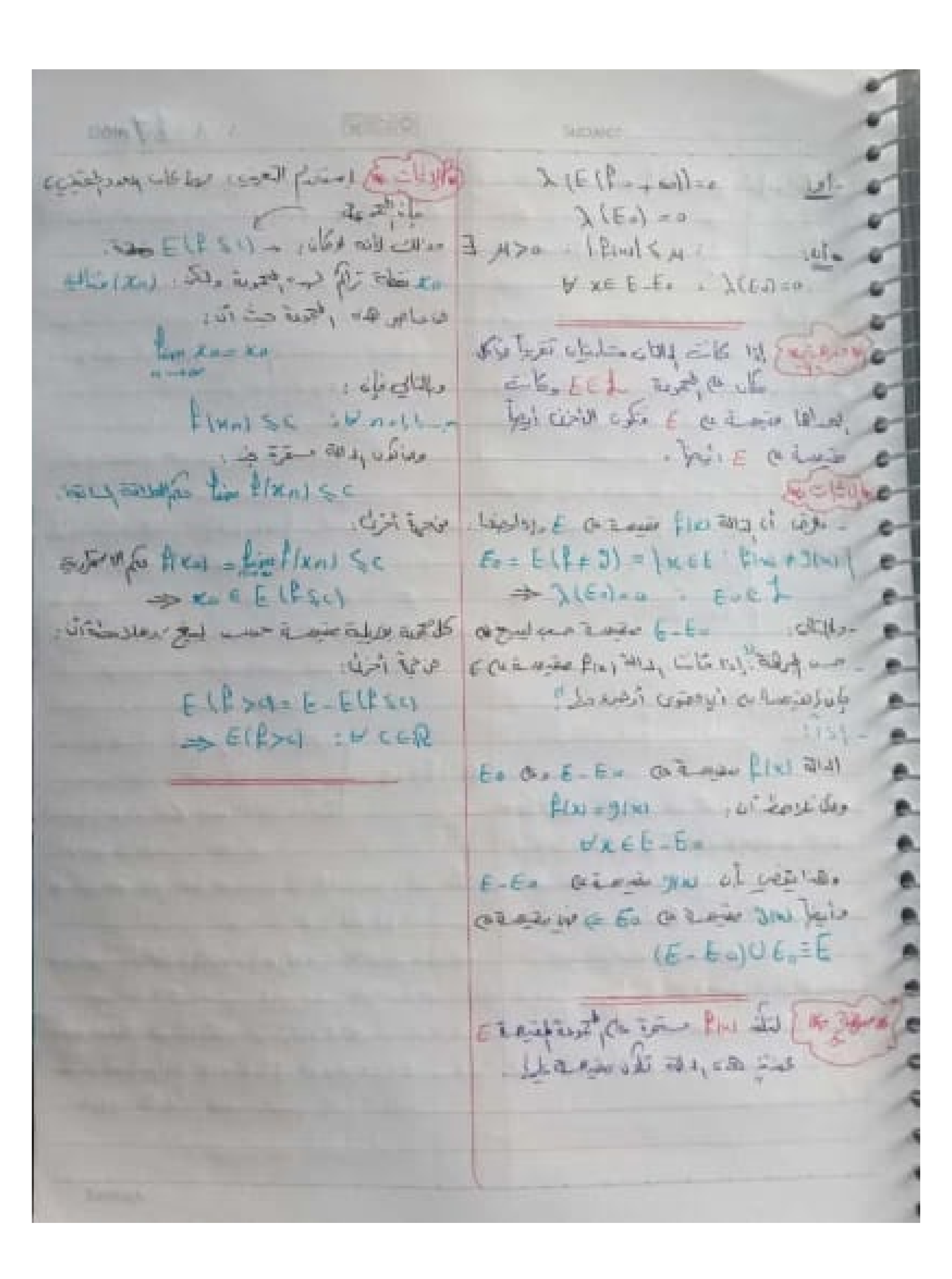
$$\lambda(\{x\in E : \lim f_n(x) \neq f(x)\})=0$$

ونرمز لذلك:

$$\lim f_n(x) \overset{a.e}{=} f(x)$$ أو $$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{a.e} f(x)$$

[3] نقول أن الدالة $f(x)$ محدودة في كل مكان E تقريبًا إذا كان:

$$\lambda(\{x\in E : f(x)=\pm\infty\})=0$$



أولاً: $\lambda(E(f_n \neq f)) = 0$

$\lambda(E_0) = 0$

ثانياً: $\exists\, M > 0 : |f(x)| \leq M$

$\forall x \in E - E_0 \; ; \; \lambda(E_0) = 0$

مبرهنة: إذا كانت الدالتان متساويتان تقريباً في كل مكان على مجموعة $E \in \mathcal{L}$ وكانت إحداهما مقيسة على E فتكون الأخرى أيضاً مقيسة على E أيضاً.

برهان:

- نفرض أن الدالة $f(x)$ مقيسة على E ولنأخذ:

$E_0 = E(f \neq g) = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$

$\Rightarrow \lambda(E_0) = 0 \; , \; E_0 \in \mathcal{L}$

- وبالتالي: $E - E_0$ مقيسة حسب ليبيغ
- حسب العلاقة: إذا كانت الدالة $f(x)$ مقيسة على E فإنها مقيسة على أي مجموعة جزئية منها.
- إذاً:

الدالة $f(x)$ مقيسة على $E - E_0$ وعلى E_0

ومن فرضنا أن: $f(x) = g(x)$

$\forall x \in E - E_0$

هذا يقتضي أن $g(x)$ مقيسة على $E - E_0$

وأيضاً $g(x)$ مقيسة على E_0 لأن قياسها صفر

$(E - E_0) \cup E_0 = E$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ مستمرة على مجموعة مقيسة E عندئذ هذه الدالة تكون مقيسة أيضاً.

ملاحظة: استخدم التعريف: سنثبت أن المجموعة مغلقة

نبرهن على أنه إذا كانت $E(f \leq c)$ مغلقة.

x_0 نقطة تراكم لهذه المجموعة وبالتالي (x_n) متتالية من عناصر هذه المجموعة حيث أن:

$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

وبالتالي فإنه:

من أجل $n = 1, 2, \ldots$: $f(x_n) \leq c$

ومن كون الدالة مستمرة فإن:

$\lim f(x_n) \leq c$

من جهة أخرى:

$f(x_0) = \lim f(x_n) \leq c$

$\Rightarrow x_0 \in E(f \leq c)$

كل مجموعة مغلقة مقيسة حسب ليبيغ وبالتالي نجد أن:

من جهة أخرى:

$E(f > c) = E - E(f \leq c)$

$\Rightarrow E(f > c) \; : \forall c \in \mathbb{R}$